



Nelineární chování podmiňuje vznik nových hodnot

Ing. Andrea Zápotocká, Ph.D.

fialova@kky.zcu.cz

UK 524



Ukázky nelineárních systémů

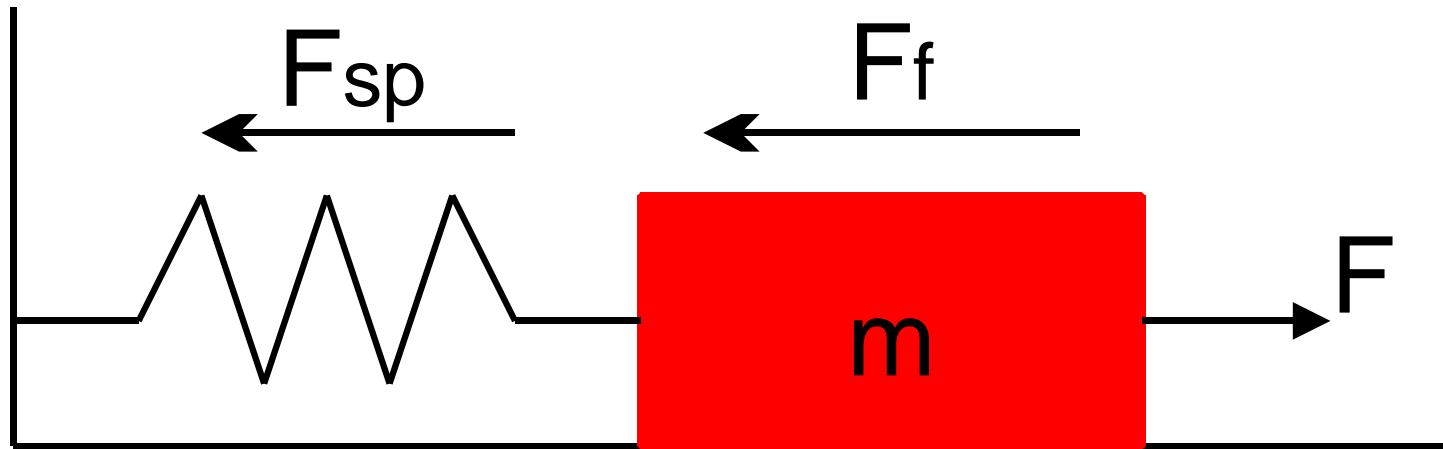
Kyvadlo

$$ml\ddot{\Theta} = -mg \sin \Theta - kl\dot{\Theta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

Mechanický systém

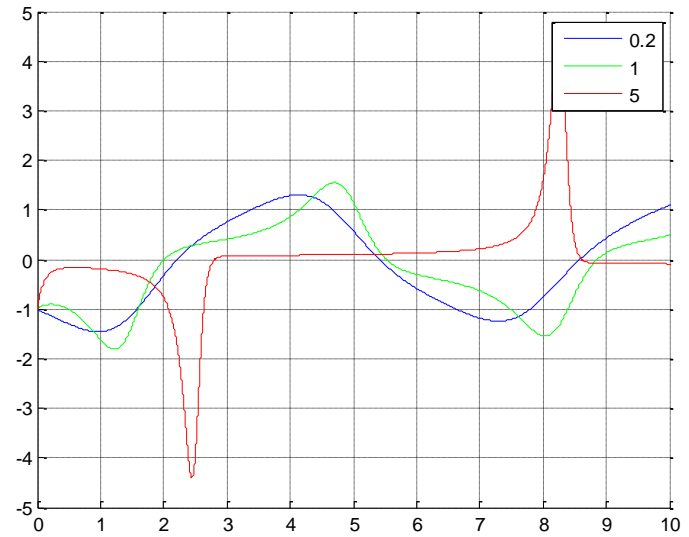
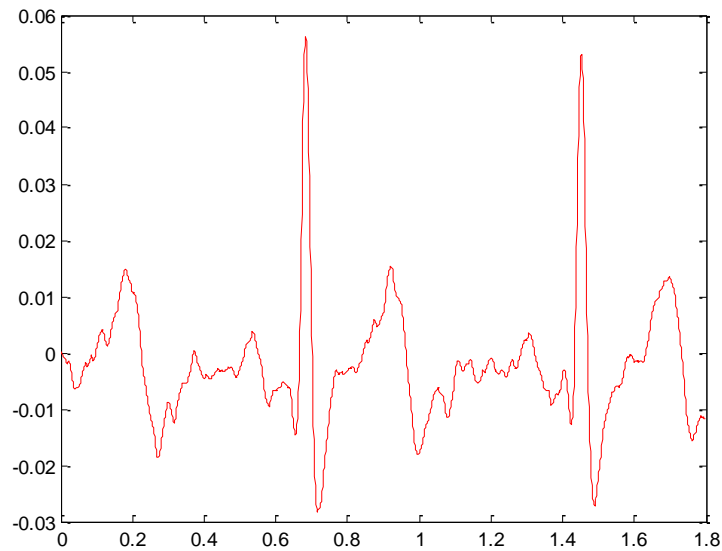


$$m\ddot{x} + F_f + F_{sp} = F$$

$$F_{sp} = k(1 \pm a^2 x^2)x$$

Van der Pool a jeho oscilátor

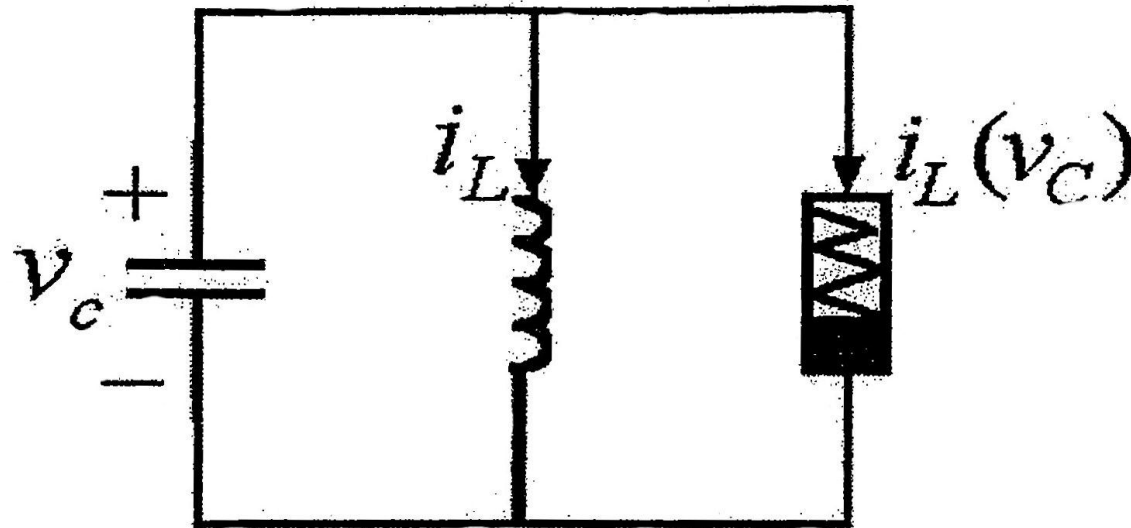
$$y'' + \varepsilon(\alpha + \beta y^2)y' + ky = 0$$



Van der Pool a jeho oscilátor

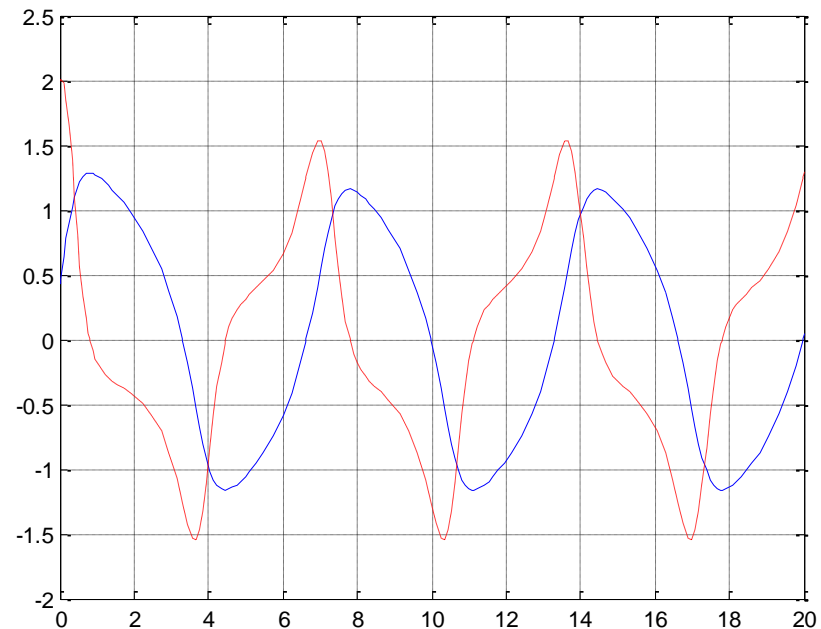
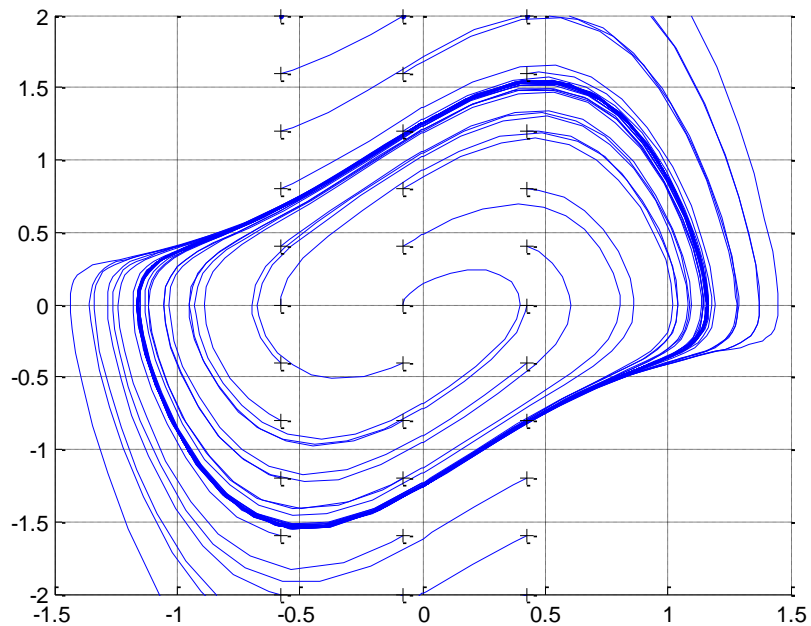
Balthasar van der Pool (1889 – 1959)

$$y'' + \varepsilon(\alpha + \beta y^2)y' + ky = 0$$



Simulace

$$\alpha = 1, \beta = 3, \varepsilon = 1, k = 1$$



! Bez ohledu na počáteční podmínky končí trajektorie na té samé křivce –
na mezním cyklu

Bifurkace

Leonhard Euler – netlumený nosník

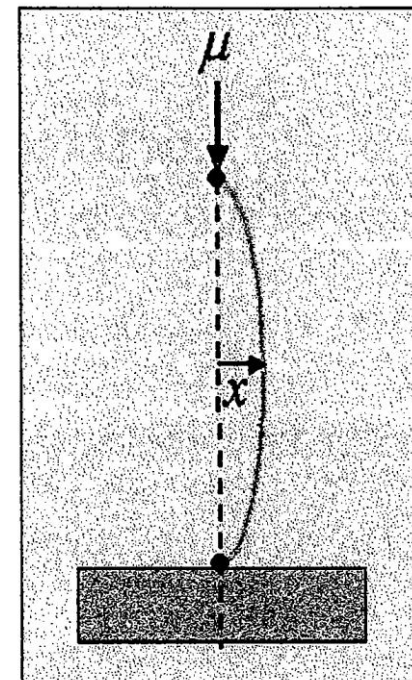
$$mx'' + dx' - \mu x + \lambda x + x^3 = 0$$

d ... tlumení

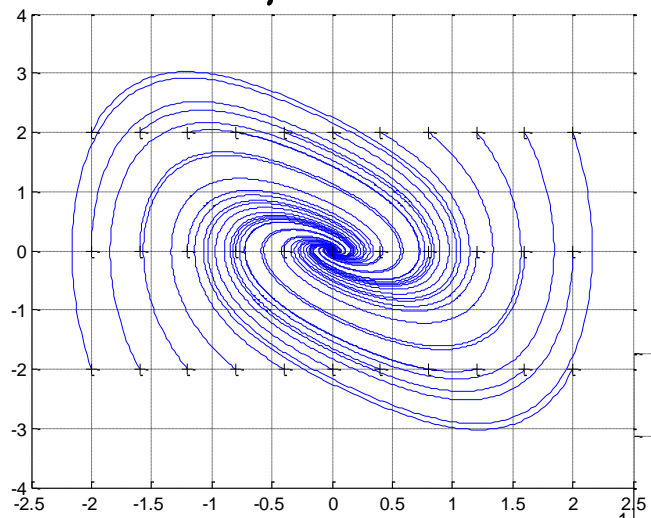
μ ... zatížení

$\lambda x + x^3$... pružná síla nosníku

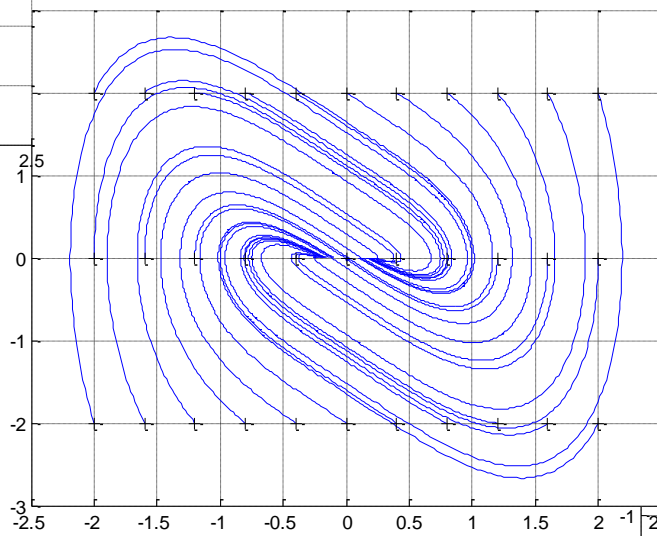
! poměr μ a $\lambda \Rightarrow$ různé množství rovnovážných stavů



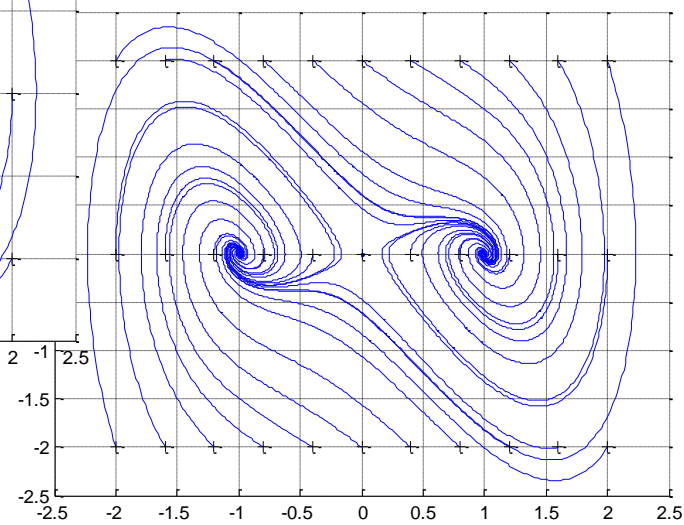
$\mu < \lambda$



$\mu = \lambda$



$\mu > \lambda$



Chaos - Lorenzův atraktor

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$

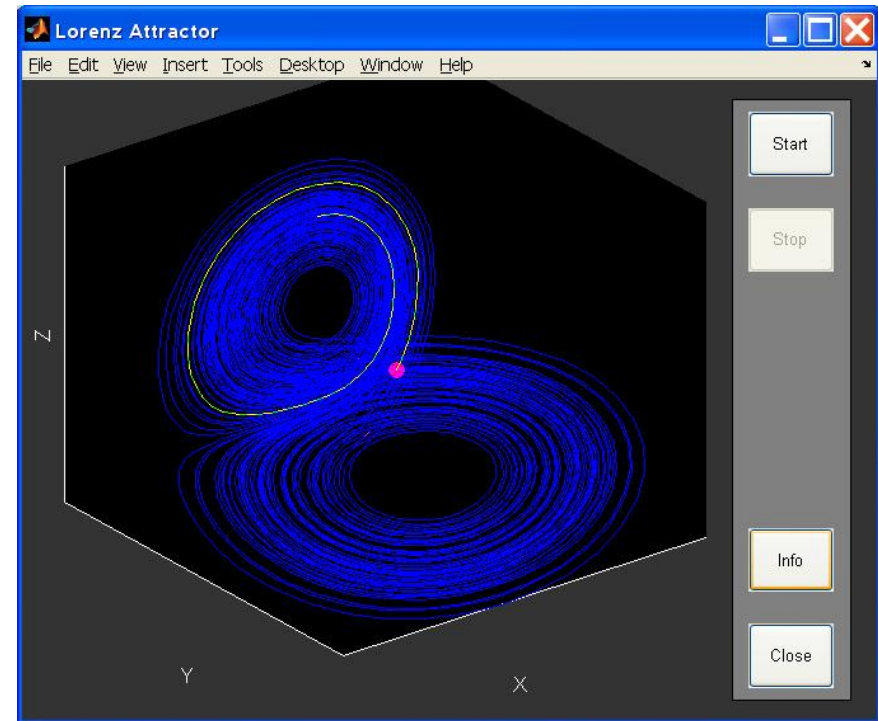
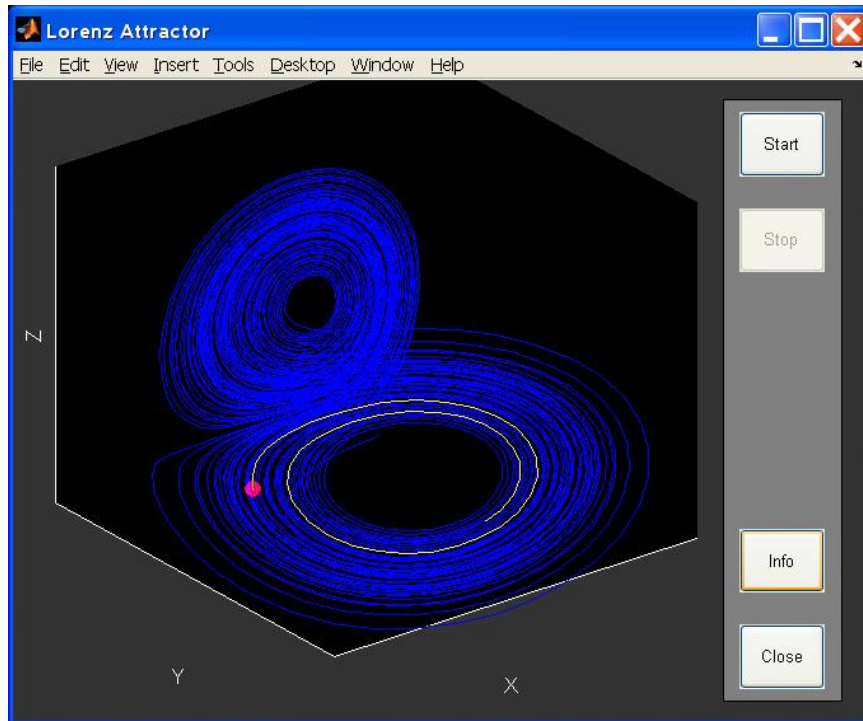
$$\dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2$$

x_1 - časová závislost proudové funkce tekutiny

x_2 - rozdíl teploty stoupajících a klesajících proudů

x_3 - odchylka teploty od lineární křivky v závislosti na výšce

Lorenzův atraktor - příklady simulací

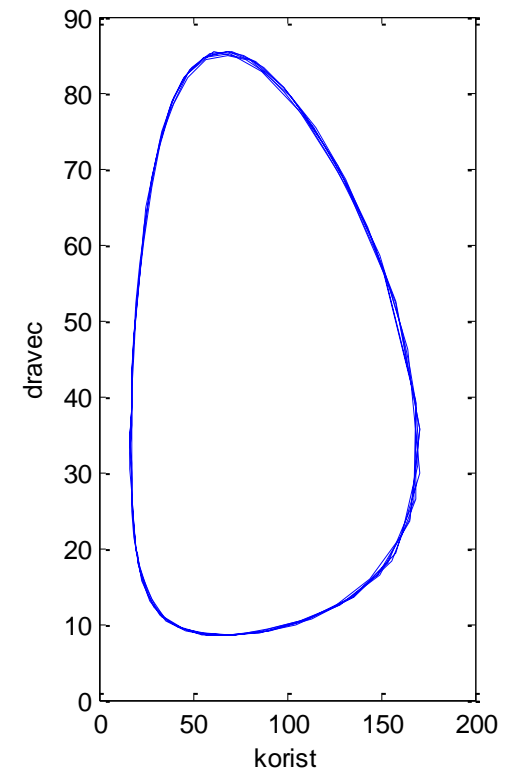
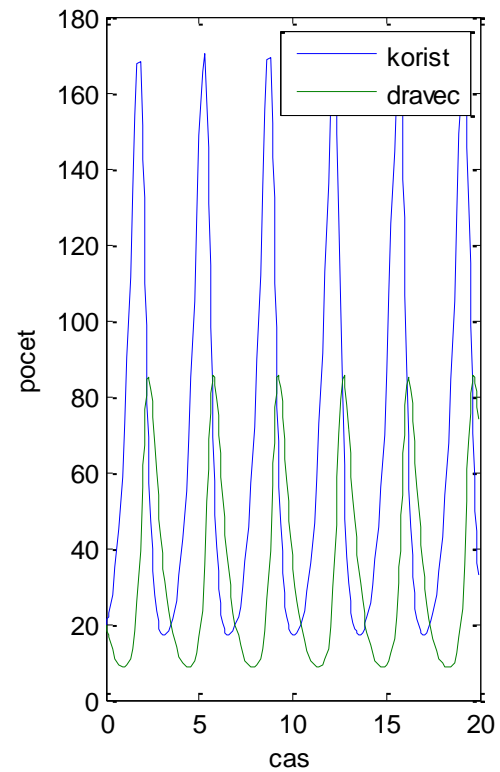


Populační rovnice - Lotka Volterra

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{bmatrix}$$

$x_1 =$ kořist

$x_2 =$ dravec



Extrémy:

bez dravců: $x_1(t) = x_1(t_0)e^{at}$

bez kořisti: $x_2(t) = x_2(t_0)e^{-ct}$

